ANALYSE DES VIBRATIONS LIBRES D'UNE BARRE PAR LA METHODE DES ELEMENTS SPECTRAUX

FREE VIBRATION ANALYSIS OF ROD BY THE SPECTRAL ELEMENT METHOD

HAMIOUD SAIDA[1], KHALFALLAH SALAH[2]

[1]Laboratoire de Génie Civil et Environnement, Université de Jijel.
[2]Ecole Nationale Polytechnique, Constantine.

Date de réception : 14/03/2016 / Date d'acceptation : 24/06/2016 / Date de publication : 30/01/2017

RÉSUMÉ

Dans cette étude, une formulation par la méthode des éléments spectraux des vibrations libres d'une structure barre est présentée. La méthode est basée sur la formulation des fonctions de forme dynamiques qui ont été ensuite développées pour construire la matrice de rigidité de l'élément spectral.

Pour présenter la performance de la méthode spectrale, une analyse numérique utilisant les éléments finis est déjà établie pour le même objectif. La comparaison des résultats obtenus par la méthode des éléments spectraux et de la méthode analytique d'une part et la méthode des éléments finis d'autre part, est effectuée. Cette comparaison montre clairement la performance et la robustesse de la méthode des éléments spectraux en analyse dynamique.

MOTS-CLÉS: Barre, méthode des éléments finis, méthode des éléments spectraux, vibrations libres, solution analytique.

ABSTRACT

In this study, a free vibration spectral element formulation of rods is presented. The method is based on the shape function formulations, which are afterwards developed to build the stiffness matrix of the spectral element.

To present the performance of the spectral element method, a numerical analysis using the finite element method is already established for the same objective. The comparison of obtained results by the spectral element and the analytical method of part and the finite element method elsewhere, is established. This comparison shows highly the performance and the robustness of the spectral element method in dynamic analysis. .

KEYWORDS: Rod, finite element method, spectral element method, free vibration, analytical solution.

1. INTRODUCTION

En analyse dynamique et statique, les structures continues peuvent être modélisées par des structures discrètes. Dans ce cas, la masse, la rigidité et l'amortissement sont représentés par des propriétés elles aussi discrètes. L'analyse dynamique d'une structure discrétisée conduit à des équations différentielles dont la solution peut être obtenue par le recours à une méthode analytique ou numérique. Dans le cas d'une modélisation répartie, les équations gouvernant la dynamique du système sont des équations aux dérivées partielles qui sont assez difficiles à résoudre.

A l'état actuel, les structures en barres sont également utilisées dans les constructions contemporaines. Elles sont constituées de plusieurs barres liées entre elles aux niveaux de nœuds supposés rigides. Les structures en barres ont une histoire très ancienne au cours du développement de différentes civilisations.

Les développements connus dans le domaine du comportement des matériaux et leurs techniques ont amélioré de manière considérable les applications modernes des structures barres. Maintenant, elles sont largement utilisées dans la construction des ponts, des toitures, des disques de télescope, des stations spatiales, etc.

En état de service, les structures en barres sont fréquemment soumises à des forces dynamiques, telles que : l'excitation du vent, les charges sismiques, les vibrations des machines, la propagation d'ondes, etc. Sous les effets vibratoires, les structures peuvent présenter différentes caractéristiques dynamiques. Ces conséquences conduisent en général à une surestimation notable de contraintes dans les éléments structuraux et probablement une rupture de la structure entière.

La réponse dynamique des structures en barres peut être obtenue par la méthode d'intégration numérique ou par la méthode de décomposition modale. Dans ce sujet, le processus de différences finies centrales est présenté par Yu (2011) tandis que la méthode des accélérations moyennes de Newmark est largement utilisée par Thai and Kim (2011) et Malla et al. (2011). Gao (2007) a utilisé la méthode de décomposition modale à l'analyse de la réponse des structures barres.

Sur le plan bibliographique, la littérature présente peu de publications relatives à l'analyse dynamique des structures en barres. Dans ce cadre, on peut citer le travail de Koohestani et Kaveh (2010) qui ont proposé une technique conduisant à l'association des problèmes à valeurs propres avec les vibrations libres pour analyser des structures spatiales sous un chargement cyclique.

Sur le plan numérique, la méthode des éléments finis est un outil d'analyse depuis plusieurs décennies et elle est devenue la plus populaire méthode numérique en calcul des structures. Le développement de la méthode des éléments finis a été initiée depuis les années cinquante par Turner (1956) qui introduit pour la première fois la notion de subdivision du domaine en sous-domaines (éléments). L'apparition des machines de calcul a contribué à l'évolution de cette méthode pendant la période entre 1960 et 1970. Dès l'année 1970, cette méthode est largement utilisée dans les travaux de recherche et constituait la base principale des logiciels et code de calcul.

L'étude du comportement dynamique des structures ayant une grande importance en ingénierie, elle est devenue nécessaire pour déterminer avec une précision satisfaisante les caractéristiques dynamiques de la structure. Pour atteindre cet objectif, la subdivision structurale en éléments finis est assez nécessaire jusqu'à l'obtention de la convergence. Le nombre important d'éléments finis utilisé est préféré car cette méthode utilise une représentation polynomiale simple du champ de déplacement. Pour que la solution converge vers une valeur acceptable il faut augmenter l'ordre d'interpolation polynomiale pour un maillage constant.

La méthode des éléments spectraux est une technique récente en comparaison avec la méthode des éléments finis. La méthode des éléments spectraux est basée sur les fonctions complexes ou trigonométriques. La méthode des éléments spectraux est introduite par Patera (1984) pour résoudre les problèmes de la mécanique des fluides. En 1988, Doyle a introduit la transformée de Fourier à la propagation des ondes longitudinales dans l'élément barre. Le même auteur en 1997 a balayé une étude de différents types d'éléments, tel que l'élément barre par la transformée de Fourier et son inverse. Dans le même concept, Gopalakrishnan et Doyle (1994) ont formulé l'élément spectral pour analyser le comportement des barres à section variable.

En général, la procédure générale de la méthode des éléments spectraux consiste à transformer les équations aux dérivées partielles du domaine temporel au domaine fréquentiel en appliquant la transformée de Fourier. L'utilisation de la transformée inverse de Fourier est nécessaire pour évaluer la réponse dans le domaine temporel.

2. FORMULATION THÉORIQUE

Cette section expose le cadre théorique du comportement dynamique d'une barre par la méthode des éléments finis, la méthode des éléments spectraux et décrit enfin la solution analytique.

2.1 La méthode des éléments finis

Une barre prismatique de longueur L, de section transversale constante Ω, de module de Young E et de masse volumique ρ, fait l'objet de cette étude. On suppose que le champ de déplacement est linéaire le long de la barre (Fig. 1).

$$u(x) = a_0 + a_1 x \tag{1}$$

L'application des conditions aux limites permet de déterminer les constantes a_0 et a_1. On les substitue dans la relation l'expression du champ de déplacement.

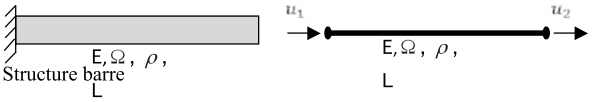

Fig. 1 Structure barre

Fig. 1 Rod structure

$$(x) = (1 - \frac{x}{L})u_1 + \frac{x}{L}u_2 \tag{2}$$

La relation (2) exprime l'interpolation du champ de déplacements en fonction de déplacements nodaux de l'élément qu'on peut écrire :

$$u(x) = \text{p}\ 1 - \frac{x}{L} \quad \frac{x}{L}\ \text{f} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \tag{3}$$

La théorie de l'élasticité linéaire permet d'écrire une relation entre le champ des déplacements et celui des déformations.

$$\varepsilon = \frac{du(x)}{dx} = \text{p} - \frac{1}{L} \quad \frac{1}{L}\ \text{f} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \tag{4}$$

On pose :

$$B = \text{p} - \frac{1}{L} \quad \frac{1}{L}\ \text{f}$$

La matrice de rigidité peut être obtenue par :

$$[K] = \int_V B^T.\text{E}.B^T\ \text{dv} \tag{5}$$

Sachant que dv = Ω.dx, la matrice de rigidité est donc :

$$[K] = \frac{E\Omega}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{6}$$

La matrice masse par unité de volume peut être obtenue de la même manière en considérant que :

$$m(x) = \rho \prec (1 - \frac{x}{L} \quad \frac{x}{L} \succ \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \tag{7}$$

La matrice masse s'obtient par :

$$[M] = \int_0^L \begin{Bmatrix} 1 - \frac{x}{L} \\ \frac{x}{L} \end{Bmatrix} \rho\ \text{p}\ (1 - \frac{x}{L} \quad \frac{x}{L}\ \text{f}\ \Omega dx \tag{8}$$

L'intégration de l'équation (8) conduit à :

$$[M] = \frac{\rho\Omega L}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \tag{9}$$

Le problème de vibrations libres n'implique pas les forces extérieures, l'équilibre entre les forces de rigidité et les forces d'inertie doit être vérifié.

$$[K] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_1 \end{Bmatrix} = \omega^2 [M] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_1 \end{Bmatrix} \tag{10}$$

La relation (10) s'écrit sous une autre manière :

$$([K] - \omega^2 [M]) \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{11}$$

En utilisant les conditions aux limites à l'encastrement, la solution de l'équation (11) permet à déterminer la pulsation de vibration.

$$\omega = \frac{\sqrt{3}}{L} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \tag{12}$$

Pour présenter la performance de la méthode utilisée, il est nécessaire de considérer l'hypothèse des masses concentrées. Dans ce cas, la matrice masse est :

$$[M] = \frac{\rho\Omega L}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{13}$$

La pulsation des vibrations libres est :

$$\omega = \frac{\sqrt{2}}{L} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \tag{14}$$

La solution donnée par la méthode analytique (section 2.2) est :

$$\omega = \frac{\pi}{2L} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \tag{15}$$

En comparant les résultats obtenus par les relations (12), (14) et (15), il est admis d'adopter l'hypothèse des masses réparties.

2.2 La méthode des éléments spectraux

Les méthodes de solution des équations aux dérivées partielles formulées dans le domaine fréquentiel peuvent être regroupées en deux catégories :

-1) les méthodes d'intégration numérique et d'analyse modale qui sont largement utilisées en analyse vibratoires ;

-2) les méthodes fréquentielles. La méthode des éléments spectraux est parmi les méthodes fréquentielles.

Considérons un élément de longueur dx de la barre (Fig. 2).

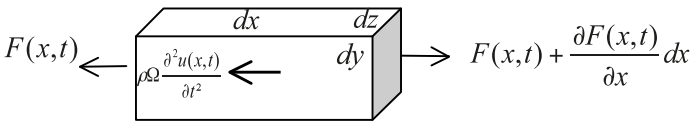

Fig. 2 Un élément extrait de la barre

Fig. 2 Extracted element of the rod

L'équation d'équilibre de l'élément s'écrit :

$$-N(x,t) + (N(x,t) + \frac{\partial N(x,t)}{\partial x} dx) - \rho\Omega \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = 0 \tag{16}$$

Ou bien,

$$\frac{\partial N(x,t)}{\partial x} dx = \rho\Omega \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \tag{17}$$

Sachant que $N(x,t) = \sigma(x,t).\Omega = E\Omega\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x}$, l'équation (17) s'écrit :

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho}\frac{\partial^2 \mathrm{u}(x,t)}{\partial x^2} \tag{18}$$

La solution de l'équation aux dérivées partielles (18) s'écrit sous la forme :

$$u(x,t) = X(x).T(t) \tag{19}$$

D'où

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \mathrm{X}(x)}{\partial x^2}.T(t) \tag{20.1}$$

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = X(x).\frac{\partial^2 \mathrm{T}(t)}{\partial t^2} \tag{20.2}$$

En substituant les équations (20.1) et (20.2) dans l'équation (18), on obtient :

$$X(x).\frac{d^2\mathrm{T}(t)}{dt^2} = \frac{E}{\rho}\frac{d^2\mathrm{X}(\mathrm{x})}{dx^2}.T(t) \tag{21}$$

Un réarrangement de l'équation (21) s'écrit :

$$\frac{\dfrac{d^2\mathrm{T}(t)}{dt^2}}{T(t)} = \frac{E}{\rho}\frac{\dfrac{d^2\mathrm{X}(\mathrm{x})}{dx^2}}{X(x)} = c \tag{22}$$

c est une constante.

La relation (22) permet de déduire les composantes de la solution, soit :

$$\mathrm{T(t)} = \mathrm{D}\,e^{i\omega t} \tag{23}$$

D'où

$$\mathrm{D}\,e^{i\omega t}(\omega^2 + c) = 0 \tag{24}$$

La constante c est égale :

$$c = \pm i\omega$$

$$\mathrm{T(t)} = \mathrm{D}_1\,e^{i\omega t} + \mathrm{D}_2\,e^{-i\omega t} \tag{25}$$

La même procédure peut être appliquée pour calculer X(x), soit :

$$\mathrm{X(x)} = Ae^{ikx} \tag{26}$$

La relation (22) permet d'écrire.

$$Ae^{ikx}(Ek^2 + c\rho) = 0 \tag{27}$$

Ce qui implique :

$$k = \pm\omega\sqrt{\frac{\rho}{E}} \tag{28}$$

D'où,

$$\mathrm{X(x)} = Ae^{ikx} + Be^{-ikx} \tag{29}$$

On tient compte des relations (25) et (29), on peut écrire :

$$\mathrm{u(x,t)} = (Ae^{ikx} + Be^{-ikx}).e^{i\omega t} \tag{30}$$

Les conditions aux limites de la barre sont :

$$u_1 = u(0,t) = (A + B).e^{i\omega t} \tag{31.1}$$

$$u_2 = u(\mathrm{L},t) = (A.e^{ikL} + B.e^{-ikL}).e^{i\omega t} \tag{31.2}$$

Le vecteur des degrés de liberté élémentaires s'écrit :

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ e^{ikL} & e^{-ikL} \end{bmatrix}.e^{i\omega t}.\begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix} \tag{32}$$

De l'équation (32), il est possible de déduire que :

$$e^{i\omega t}.\begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix} = (\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ e^{ikL} & e^{-ikL} \end{bmatrix})^{-1}\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{e^{-ikL} - e^{ikL}}\begin{bmatrix} e^{-ikL} & -1 \\ -e^{ikL} & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \tag{33}$$

La relation (30) s'écrit sous la forme :

$$u(\mathrm{x,t}) = \left\langle e^{ikx} \quad e^{-ikx} \right\rangle.e^{i\omega t}\begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix} \tag{34}$$

On substitue la relation (33) dans la relation (30), on obtient :

$$u(\mathrm{x,t}) = \left\langle e^{ikx} \quad e^{-ikx} \right\rangle.\frac{1}{e^{-ikL} - e^{ikL}}\begin{bmatrix} e^{-ikL} & -1 \\ -e^{ikL} & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \tag{35}$$

On dérive la dernière relation :

$$\frac{\partial u(\mathrm{x,t})}{\partial x} = ik\left\langle e^{ikx} \quad -e^{-ikx} \right\rangle.\frac{1}{e^{-ikL} - e^{ikL}}\begin{bmatrix} e^{-ikL} & -1 \\ -e^{ikL} & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \tag{36}$$

Les forces normales axiales aux nœuds de la barre sont :

$$F_1 = -E\Omega\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = -ik.E\Omega\left\langle 1 \quad -1 \right\rangle.\frac{1}{e^{-ikL} - e^{ikL}}\begin{bmatrix} e^{-ikL} & -1 \\ -e^{ikL} & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \tag{37.1}$$

$$F_2 = E\Omega\frac{\partial u(\mathrm{L},t)}{\partial x} = ik.E\Omega\left\langle e^{ikL} \quad -e^{-ikL} \right\rangle\frac{1}{e^{-ikL} - e^{ikL}}\begin{bmatrix} e^{-ikL} & -1 \\ -e^{ikL} & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \tag{37.2}$$

Les forces aux extrémités de l'élément sont :

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = ik.E\Omega.\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ e^{ikL} & -e^{-ikL} \end{bmatrix}\frac{1}{e^{-ikL} - e^{ikL}}\begin{bmatrix} e^{-ikL} & -1 \\ -e^{ikL} & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \tag{38}$$

Ou bien

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \frac{ik.E\Omega.e^{ikL}}{e^{ikL} - e^{-ikL}}\begin{bmatrix} 1 + e^{-2ikL} & -2e^{-ikL} \\ -2e^{-ikL} & 1 + e^{-2ikL} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \tag{39}$$

En utilisant la relation (39), on déduit la matrice de rigidité spectrale.

$$\left[K_{spec}\right] = \frac{ik.E\Omega.e^{ikL}}{e^{ikL} - e^{-ikL}} \begin{bmatrix} 1+e^{-2ikL} & -2e^{-ikL} \\ -2e^{-ikL} & 1+e^{-2ikL} \end{bmatrix} \quad (40)$$

Enfin, les pulsations de vibration obtenues par la méthode spectrale peuvent être déterminées en supposant que le déterminant de la matrice de rigidité spectrale est nul.

$$\det(\left[K_{spec}\right]) = \frac{ik.E\Omega.e^{ikL}}{e^{ikL} - e^{-ikL}} \left| \begin{bmatrix} 1+e^{-2ikL} & -2e^{-ikL} \\ -2e^{-ikL} & 1+e^{-2ikL} \end{bmatrix} \right| = 0 \quad (41)$$

Ce qui conduit à :

$$\cos(2kL) - i\sin(2kL) = 1 \quad (42)$$

On ne tient compte que de la partie réelle.

$$\sin(2kL) = 0 \quad (43)$$

La solution de l'équation (43) est :

$$k = \frac{n\pi}{2L} = \omega\sqrt{\frac{\rho}{E}} \quad (44)$$

Avec n = 1, 2, 3, …
L'expression de la fréquence du système est :

$$f = \frac{n}{4L}\sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (45)$$

Il est possible de déduire les fréquences des cinq premiers modes de vibration (Tab. 1).

Mode de vibration	1	2	3	4	5
$f*(\frac{1}{L}\sqrt{\frac{E}{r}})$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{5}{4}$

Tableau 1. Les fréquences des cinq premiers modes de vibration
Table 1. Frequencies of five first modes of vibration

2.3 La méthode analytique

L'objectif primordial de la méthode analytique est de mettre en place un outil analytique permettant de résoudre le système d'équations aux dérivées partielles du modèle barre. Les problèmes analytiquement traités ne sont pas nombreux dans la littérature et ils sont néanmoins utiles comme une référence de comparaison et de validation des méthodes numériques utilisées pour résoudre les problèmes pratiques.
Le régime vibratoire d'une barre est caractérisé par un système d'équations aux dérivées partielles de la forme donnée par la relation (18) avec le respect des conditions aux limites. La technique de séparation des variables permet d'obtenir les solutions en introduisant les conditions aux limites.
La solution recherchée donnant le déplacement horizontal ou axial est présentée sous forme d'un produit de deux fonctions (19) et la solution est donnée par la relation (30).
Si $\omega \neq 0$, les solutions s'écrivent sous la forme suivante :

$$U(x) = A\cos\lambda x + B\sin\lambda x \quad (46)$$

Avec $\lambda = \omega\sqrt{\frac{E}{\rho}}$.

Les pulsations propres de la structure sont définies par :

$$\omega_i = \lambda_i\sqrt{\frac{\rho}{E}} \quad (47)$$

Pour $\omega \neq 0$, il existe deux solutions si :

$$\cos\lambda_i L = 0 \quad (48)$$

Ou bien

$$\lambda_i L = (2i-1)\frac{\pi}{2} \quad (49)$$

La relation (49) conduit à :

$$f_i = \frac{\omega_i}{2\pi} = \frac{(2i-1)}{4L}\sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (50)$$

3. RÉSULTATS OBTENUS

Soit l'élément barre montré sur la figure (3).

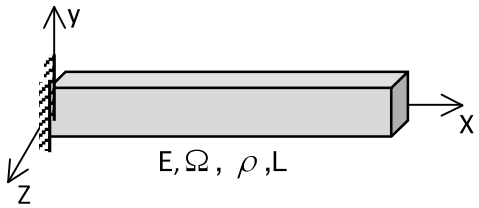

Fig. 3 La barre étudiée
Fig. 3 Studied rod

La barre faisant l'objet de cette étude est encastrée à une extrémité et libre à l'autre. Les propriétés mécaniques et géométriques sont : le matériau a un module de Young, E= 2. 10^{11} N/m², une masse volumique ρ = 7800 kg/m³, une section transversale Ω = 3.10^{-5}m² et une longueur L = 1m.

3.1 La méthode exacte

La solution établie par la méthode analytique (50) est donnée par

$$\omega_r = \frac{\sqrt{3}}{L}\sqrt{\frac{E}{\rho}}.$$

De même, la pulsation des vibrations libres dans le cas de masses concentrées est

$$\omega_c = \frac{\sqrt{2}}{L}\sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

tandis que lorsque les masses sont réparties, la pulsation est

$$\omega_r = \frac{\sqrt{3}}{L}\sqrt{\frac{E}{\rho}}.$$

D'où l'on peut distinguer deux analyses en se basant sur la nature de distribution de la masse de la barre. Les pulsations de vibration obtenues en tenant compte de masses réparties et concentrées sont :

$$\frac{\omega_{ex}}{\omega_r} = 90.70\% \quad \text{et} \quad \frac{\omega_c}{\omega_{ex}} = 90.01\%.$$

Pour cette raison, on sélectionne la méthode des masses réparties.

3.2 La méthode des éléments finis

Les résultats de calcul par la méthode des éléments finis sont regroupés dans le tableau 2. Les résultats montrent les fréquences de vibrations libres des 5 premiers modes de vibration qui correspondent aux différentes discrétisations. Dans ce sujet, nous avons discrétisé la barre 2, 5, 8, 10 et 16 éléments finis.

Mode	1	2	3	4	5
1 élément fini	1395.9				
2 éléments finis	1298.7	4536.7			
5 éléments finis	1271	3979	6979	10466	13461
8 éléments finis	1268	3853	6586	9563	12851
10 éléments finis	1267	3833	6495	9312	12347
16 éléments finis	1266	3812	6393	9037	11767
Solution exacte (HZ)	1265.92	3797.77	6329.62	8861.47	11393.31

Tableau 2 : Les fréquences des cinq premiers modes de vibration

Table 2 : Frequencies of the five first modes of vibration

Les résultats établis par la méthode exacte sont introduits dans la dernière ligne du tableau. On observe qu'il est nécessaire de discrétiser la structure au moins à 16 éléments finis pour que les résultats de la méthode numérique convergent par rapport aux résultats exactes.

3.3 La méthode des éléments spectraux

La réponse vibratoire de la barre représentée par la fréquence est donnée par l'équation (45) et de manière générale par le tableau 2. Les résultats obtenus par la méthode des éléments spectraux sont absolument convergents.

Les trois premiers modes de vibration de la barre sont donnés par la figure (4). Ils montrent le mode de vibration de la barre.

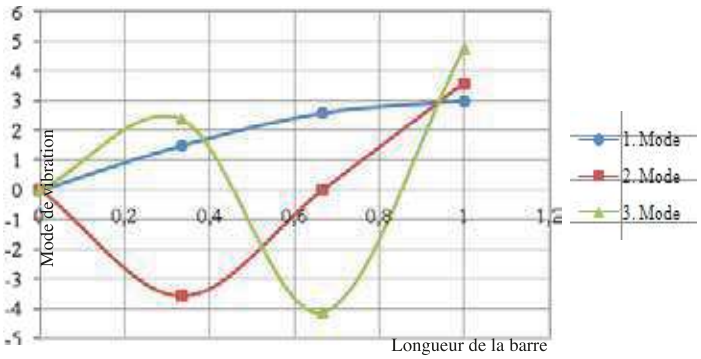

Fig. 4 Les trois premiers modes de vibration axiale.

Fig. 4 Three first modes of axial vibration

Dans la section suivante, on présente l'influence des paramètres de la matrice de rigidité sur la pulsation de vibration. Les paramètres de la matrice de rigidité sont établis par la méthode des éléments finis et la méthode des éléments spectraux.

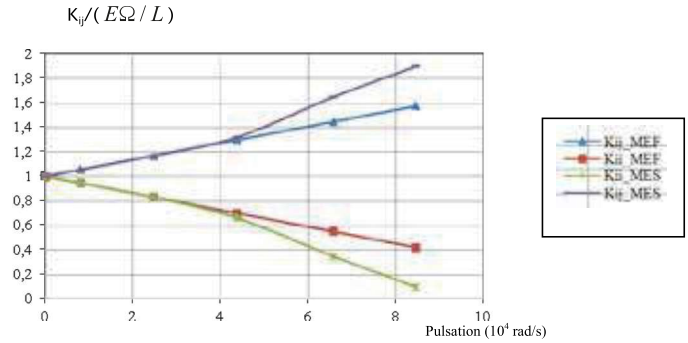

Fig. 5 Paramètres de rigidité en fonction de la pulsation

Fig. 5 Stiffness parameters on function of the pulsation

La figure (5) montre que les paramètres diagonaux de la matrice de rigidité conventionnelle sont surestimés tandis que les autres paramètres sont sous-estimés.

4. CONCLUSIONS

Les conclusions pouvant être tirées de cette étude sont résumées comme suit :

- La performance et la robustesse de la méthode des éléments spectraux sont clairement observées ;
- Un seul élément spectral est suffisant pour analyser la réponse vibratoire d'une barre. Les résultats obtenus montrent une convergence très satisfaisante en comparant les résultats obtenus avec ceux de la méthode analytique ;
- La convergence par la méthode des éléments finis est très retardée. Il est nécessaire d'utiliser 16 éléments finis pour atteindre les résultats exacts ;
- Les valeurs des paramètres diagonaux de la matrice de rigidité de la méthode des éléments finis sont surestimées ;
- De la même manière, les valeurs des paramètres non diagonaux de la matrice de rigidité établies par de la méthode des éléments finis sont sous-estimées ;
- Sur cette base, les contraintes axiales sont importantes tandis que les contraintes tangentielles sont moins évaluées.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

Doyle, J.F. (1997), Wave Propagation in Structures: Spectral Analysis Using Fast Discrete Fourier Transforms, 2nd edn, Springer New York.

Doyle, J.F. (1988), A spectrally formulated finite elements for longitudinal wave propagation. International Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis, 3, 1–5.

Gao, W. (2007), Random seismic response analysis of truss structures with uncertain parameters. *Engineering Structures*, 29 (7), pp. 1487-1498.

Gopalakrishna, S. and Doyle, J. F. (1994), Wave propagation in connected waveguides of varying cross-section. Journal of Sound and Vibration, 175 (3), 347-363.

Koohestani, K. & Kaven, A., (2010), Efficient buckling and free vibration analysis of cyclically repeated space truss structures. *Finite Elements in Analysis and Design,* 46**,** pp. 943-948.

Patera ,A.T. (1984), A spectral element method for fluid dynamics-laminar flow in a channel expansion. Journal of Computational physics, 54, 468-488.

Thai, H.T. & Kim, S.E. (2011), Non-linear inelastic time-history analysis of truss structures. *Journal of Constructional Steel Research,* 67**,** pp. 1966-1972.

Turner, M. J., Clough, R. W., Martin, H. C., and Topp, L. J., (1956), "Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures," Journal of Aeronautical Sciences, Vol. 23, No. 9, pp. 805–824.

Yu, Y., Li, R. & Luo, Y. (2011), Progressive collapse simulation of truss structures based on the Finite Particle Method. Electric Technology and Civil Engineering (ICETCE), 2011 International Conference on, IEEE, pp. 567-571.